

不要跟數學家說“沒有永恆”

查而思

實數有兩種：有理數和無理數。有理數包括所有分數或無限循環小數(無限循環小數通過無限幾何級數都可以轉換成分數)。至於無理數事情就沒那麼簡單。

談到無理數，我們馬上想到的是一些符號，比如大多數人比較熟知的無理數有：

$$\sqrt{2}=1.414 \dots \dots$$

$$e=2.71828 \dots \dots$$

$$\pi = 3.1415926 \dots \dots$$

有沒有想過為什麼談到無理數時人們需要借用符號、代碼之類的？

看過那個電影嗎？2012年上映李安導演的“Life of π ”——《少年派的奇幻漂流》，有人簡介“这是一个关于信仰的故事， π 就是那个在无意义的世界寻找意义的人。”影片主人公的名字就是 π ，有超强的記憶力，一次憑記憶在課堂上寫出好幾黑板 π 的數值。

可是 π 是無理數，不論你寫出它多少數位的數值，幾百、幾萬、幾億，你仍不知道下一個數位上的數字是什麼。借用計算機人們現今可以幾乎逼近 π 到任何想要的數位，只要有足夠的計算時間和打印時間。但不論多精準的逼近，花多長時間的計算與打印，那只不過是逼近而已，絕不是真正的 π 的本身。要見到 π 認識真正的 π ，我們必須進入永恆！

π 作為圓周長和直徑的比例是實實在在存在的實數，但沒有人知道也不可能知道 π 真正完全的數值，因為這個原因，我們只能借用像 π 這樣的符號來表達。像 π 這樣的無理數有多少呢？跟有理數比哪個更多些呢？

有理數有無窮多，其中所包含的整數就已經無窮多；但所有的有理數雖無窮却還是可數的，也就是說可以和所有正整數{1, 2, 3, ……}一一對號入座。無理數有多少呢？我們來看另一角度的同等問題就會得到答案。

問題：如果在實數軸上隨機抽選一個數，這個被抽到的數是一個有理數的概率有多大？同等的小點範圍的問題是：在0和1之間的實數中隨機抽選一個數，這個被抽到的數是一個有理數的概率有多大？

作為一個簡單的例子，假如抽到 $\frac{1}{3}$ 這個數字，概率是多少呢？因為 $\frac{1}{3} = 0.\underline{3} = 0.33333 \dots \dots$ ，抽到這個數就相當於小數點後面所有數位上永遠是3。第一個是3的概率，0到9十個數字選一個的概率，是 $\frac{1}{10} = 0.1$ ，兩個都是3的概率是 $\left(\frac{1}{10}\right)^2 = 0.01$ ，三個都是三

的概率是 $\left(\frac{1}{10}\right)^3 = 0.001$ ，所有數位都是三的概率是(用微積分的運算符號)： $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0.0 \cdots 0 \cdots = 0$ 。

更普遍一點我們假設這個被抽到的有理數是 $0.d_1 \dots d_s$ ，其中 d_i 是0到9之間的任何數， $d_1 \dots d_s$ 是要無限循環的那一段數。這個無限循環小數被抽到的概率是： $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{sn} = 0$ ，依然是0。也就是說從0到1之間任意抽到有理數的概率是0。那麼我們倒過來說，從0到1之間抽到一個無理數的概率就是1，意即隨機抽任何一個數你總是會抽到一個無理數。換言之，如果把所有的無理數拿掉，從0到1這段線段的長度為0。引申之，若把所有的無理數從整個實數軸上全部拿掉，整個數軸的長度就是0。

可以想像無理數比有理數多太多了，是另一個等級的無窮多，是不可數的無窮多，是充滿整個數軸的無窮多，……。

然而如此之多的無理數，像 π 這樣的無理數，從來沒有任何人真正見過、認識其中任何一個，充其量只是用有理數來得到的逼近而已。無論人類技術如何突飛猛進，計算機計算速度怎樣高而又高，甚至有了量子計算機，充其量還只不過是一個有理數逼近而已，無法展示 π 的真實面目，無法展示任何一個無理數的真實面目。這是人類何等的悲劇！

縱觀人類幾千年的文明進步、現代科學技術的蓬勃發展，實在令人讚嘆不已。若將整個人類的豐功偉績數量化，放在數軸上，看上去會是密密麻麻，稠稠密密……；然而無需仔細觀察人們自己心知肚明這些數字都只不過是有理數的些悉而已，雖看上去密密麻麻，稠稠密密，放在一起充其量長度不過為0而已，可謂是完全的虛空。那真正有分量、有長度的卻是那看不見的！

其實早在2900年前，智者所羅門王，早已看透這點。他是當時世上最具智慧、財富和權柄的一位。晚年的時候他卻這樣說：“傳道者說：虛空的虛空，虛空的虛空，凡事都是虛空。人一切的勞碌，就是他在日光之下的勞碌，有什麼益處呢？”（傳道書1:2-3）

如此低沉悲觀與所羅門的地位才智反差極大不言而喻。但智者終究是智者，會比眾人看的更遠一些。給人有些低沉感覺的所羅門同時也給人指明一條盼望之路，那就是仰望日光之上已經為人預備永恆的永生上帝：“上帝造萬物，各按其時成為美好，又將永生（或永遠、永恆）安置在世人心裡，然而上帝從始至終的作為，人不能參透。”（傳道書3:11）。他結束傳道書的時候也向後人發出一個偉大的邀請與挑戰：“你趁著年幼，衰敗的日子尚未來到，就是你所說「我毫無喜樂」的那些年日未曾臨近之先，當記念造你的主。……這些事都已聽見了，總意就是敬畏上帝，謹守祂的誡命，這是人所當盡的本分。因為人所做的事，連一切隱藏的事，無論是善是惡，上帝都必審問。”（傳道書12:1, 13-14）

不要跟數學家說沒有永恆，更不要跟所羅門那樣的古人先賢說沒有永恆。我們都當嚴肅地對自己說：你是否已經預備好進入永恆了？